Révisions & Oraux ; Série N°8

Exercice 1 Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Exercice 2 On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est absolument croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$.

1. Soit $\beta > 0$. Montrer que $f\colon x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ est absolument croissante sur $[0,1[$.
2. Montrer que si f et g sont absolument croissantes, alors fg l'est également.
3. ★ Montrer que si f est absolument croissante sur I, $g = e^f$ l'est également.

Exercice 3 [IMT MP] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. Variations, limites de f. Tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 4 [Centrale MP 2024]
1. Énoncer le theoreme de Rolle.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie.

On définit la fonction $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in]-1,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x)$.
4. Quel est le degré de P_n ? Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

Exercice 5 [Mines MP 2024] On lance simultanement deux pièces equilibrées n fois. Soit E_n l'évènement «les deux pièces donnent le même nombre de pile».

1. Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq a+b$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$. En déduire $\mathbf{P}(E_n)$.
2. Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'évènement E_n est réalisé.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Exercice 7
1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$
2. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)}$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $r \geq 1$ est arbitraire, et $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.
2. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 9 [ENS MP 2024] Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k z_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Révisions & Oraux ; Série N°8

Exercice 1 Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Exercice 2 On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est absolument croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$.

1. Soit $\beta > 0$. Montrer que $f\colon x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ est absolument croissante sur $[0,1[$.
2. Montrer que si f et g sont absolument croissantes, alors fg l'est également.
3. ★ Montrer que si f est absolument croissante sur I, $g = e^f$ l'est également.

Exercice 3 [IMT MP] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. Variations, limites de f. Tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 4 [Centrale MP 2024]
1. Énoncer le theoreme de Rolle.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie.

On définit la fonction $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in]-1,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x)$.
4. Quel est le degré de P_n ? Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

Exercice 5 [Mines MP 2024] On lance simultanement deux pièces equilibrées n fois. Soit E_n l'évènement «les deux pièces donnent le même nombre de pile».

1. Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq a+b$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$. En déduire $\mathbf{P}(E_n)$.
2. Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'évènement E_n est réalisé.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Exercice 7
1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$
2. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)}$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $r \geq 1$ est arbitraire, et $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.
2. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 9 [ENS MP 2024] Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k z_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.